

Chuyên đề 2 :

HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ

TÓM TẮT GIÁO KHOA

I. Hệ phương trình bậc nhất nhiều ẩn

1. Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn

a. Dạng :

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \quad (1)$$

Cách giải đã biết: Phép thế, phép cộng ...

b. Giải và biện luận phương trình : Quy trình giải và biện luận

Bước 1: Tính các định thức :

- $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$ (gọi là định thức của hệ)
- $D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1$ (gọi là định thức của x)
- $D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1$ (gọi là định thức của y)

Bước 2: Biện luận

- Nếu $D \neq 0$ thì hệ có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = \frac{D_x}{D} \\ y = \frac{D_y}{D} \end{cases}$
- Nếu $D = 0$ và $D_x \neq 0$ hoặc $D_y \neq 0$ thì hệ vô nghiệm
- Nếu $D = D_x = D_y = 0$ thì hệ có vô số nghiệm hoặc vô nghiệm

Ý nghĩa hình học:

Giả sử (d_1) là đường thẳng $a_1x + b_1y = c_1$

(d_2) là đường thẳng $a_2x + b_2y = c_2$

Khi đó:

- Hệ (I) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow (d_1)$ và (d_2) cắt nhau
- Hệ (I) vô nghiệm $\Leftrightarrow (d_1)$ và (d_2) song song với nhau
- Hệ (I) có vô số nghiệm $\Leftrightarrow (d_1)$ và (d_2) trùng nhau

Áp dụng:

Ví dụ 1: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 5x - 2y = -9 \\ 4x + 3y = 2 \end{cases}$

Ví dụ 2: Giải và biện luận hệ phương trình: $\begin{cases} mx + y = m + 1 \\ x + my = 2 \end{cases}$

Ví dụ 3: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} mx + 2y = 3 \\ x + my = 1 \end{cases}$

Xác định tất cả các giá trị của tham số m để hệ có nghiệm duy nhất (x;y) thỏa $x > 1$ và $y > 0$

II. Hệ phương trình bậc hai hai ẩn:

1. Hệ gồm một phương trình bậc nhất và một phương trình bậc hai hai ẩn:

Ví dụ : Giải hệ:
$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ x^2 + 2y^2 - 2xy = 5 \end{cases}$$

Cách giải: Giải bằng phép thế

2. Hệ phương trình đối xứng :

a.Định nghĩa: Đó là hệ chứa hai ẩn x,y mà khi ta thay đổi vai trò x,y cho nhau thì hệ phương trình không thay đổi.

b.Cách giải:

Bước 1: Đặt $x+y=S$ và $xy=P$ với $S^2 \geq 4P$ ta đưa hệ về hệ mới chứa hai ẩn S,P.

Bước 2: Giải hệ mới tìm S,P . Chọn S,P thoả mãn $S^2 \geq 4P$.

Bước 3: Với S,P tìm được thì x,y là nghiệm của phương trình :

$$X^2 - SX + P = 0 \text{ (định lý Viét đảo).}$$

Chú ý: Do tính đối xứng, cho nên nếu $(x_0; y_0)$ là nghiệm của hệ thì $(y_0; x_0)$ cũng là nghiệm của hệ

Áp dụng:

Ví dụ : Giải các hệ phương trình sau :

$$\begin{array}{lll} 1) \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 4 \\ xy + x + y = 2 \end{cases} & 2) \begin{cases} x + y + xy = -7 \\ x^2 + y^2 - 3x - 3y = 16 \end{cases} & 3) \begin{cases} xy + x + y = 11 \\ x^2 y + xy^2 = 30 \end{cases} \\ 4) \begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ 3(x + y) + 2xy + 9 = 0 \end{cases} & 5) \begin{cases} x^2 y + xy^2 = 30 \\ x^3 + y^3 = 35 \end{cases} & \end{array}$$