ĐỀ THI, BÀI GIẢI TUYỂN SINH ĐH MÔN TOÁN KHỐI A NĂM 2007

PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ CÁC THÍ SINH

Câu I (2 điểm): Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + 2(m+1)x + m^2 + 4m}{x+2}$ (1), m là tham số.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi m = – 1.
2. Tìm m để hàm số (1) có cực đại và cực tiểu, đồng thời các điểm cực trị của đồ thị cùng với gốc tọa độ O tạo thành một tam giác vuông tại O.

Câu II (2 điểm): 1. Giải phương trình : $\left(1+\sin^2 x\right)\cos x + \left(1+\cos^2 x\right)\sin x = 1 + \sin 2x$.

2. Tìm m để phương trình sau có nghiệm thực : $3\sqrt{x-1} + m\sqrt{x+1} = 2\sqrt[4]{x^2-1}$

Câu III (2điểm): Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai đường thẳng

$d_1 : \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z+2}{1}$ và $d_2 : \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 3 \end{cases}$ 1.Chứng minh rằng d_1 và d_2 chéo nhau.

2.Viết phương trình đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (P): 7x + y – 4z = 0 và cắt hai đường thẳng d_1, d_2.

Câu IV (2 điểm): 1. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường: y = (e + 1)x, $y = \left(1 + e^x\right)x$

2. Cho x, y, z là các số thực dương thay đổi và thỏa mãn điều kiện xyz = 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : $P = \dfrac{x^2(y+z)}{y\sqrt{y} + 2z\sqrt{z}} + \dfrac{y^2(z+x)}{z\sqrt{z} + 2x\sqrt{x}} + \dfrac{z^2(x+y)}{x\sqrt{x} + 2y\sqrt{y}}$

Phần tự chọn V.a hoặc V.b

V.a . (Không phân ban) (2 đ)

1. Trong mp với hệ tọa độ Oxy, cho ΔABC có A(0;2), B (-2;-2), C (4;-2). Gọi H là chân đường cao kẻ từ B; M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và BC. Viết pt đường tròn đi qua các điểm H, M, N.

2. CMR: $\dfrac{1}{2}C_{2n}^1 + \dfrac{1}{4}C_{2n}^3 + \dfrac{1}{6}C_{2n}^5 + ... + \dfrac{1}{2n}C_{2n}^{2n-1} = \dfrac{2^{2n}-1}{2n+1}$

V.b (Phân ban) (2 đ) 1. Giải bất phương trình: $2\log_3(4x-3) + \log_{\frac{1}{3}}(2x+3) \le 2$

2. Cho hình chóp S. ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên SAD là Δ đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh SB, BC, CD. Chứng minh: AM vuông góc với BP và tính thể tích khối tứ diện CMNP.

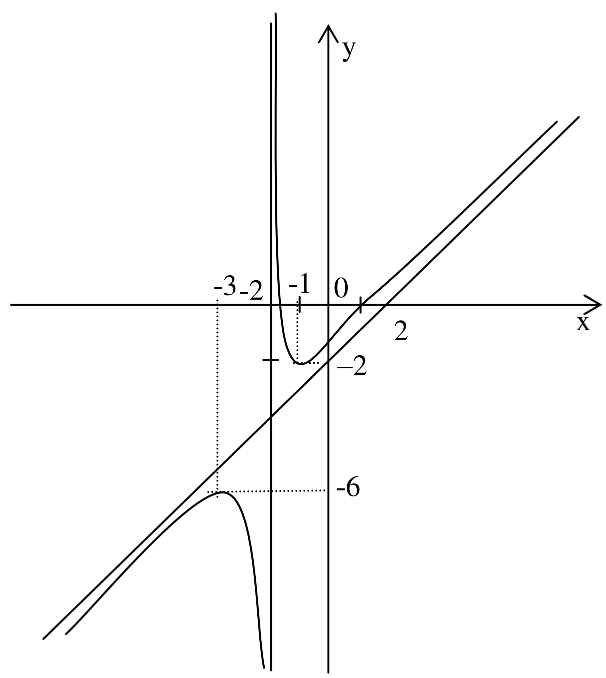
BÀI GIẢI

Câu I : 1/ Với m = –1 : $y = \dfrac{x^2-3}{x+2} = x - 2 + \dfrac{1}{x+2}$ MXĐ : D = R \ {-2} y’ = $1-\frac{1}{(x+2)^2}$; y’ = 0 ⇔ x = −3 ∨ x = −1 TCĐ : x = - 2; TCX : y = x – 2 ; y(0) = $-\frac{3}{2}$

<u>BBT</u> :

x	−∞		−3		−2		−1		+∞
y’		+	0	−	‖	−	0	+	
y	-∞	↗	-6	↘	-∞ ‖ +∞	↘	−2	↗	+∞
			CĐ				CT		

<u>Đồ thi</u> :



Đồ thị cắt trục hoành tại $(\pm\sqrt{3};0)$

2/ $y' = \dfrac{x^2 + 4x - m^2 + 4}{(x+2)^2}$

Hàm số (1) có cực đại và cực tiểu $\Leftrightarrow$ y' = 0 có 2 nghiệm phân biệt khác – 2

$\Leftrightarrow \Delta' = m^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 0$

Khi $m \neq 0$ gọi A, B là 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số (1)

Ta có: A(- 2 – m ; - 2) ; B (- 2 + m ; 4m – 2)

ΔOAB vuông tại O $\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 0$ $\Leftrightarrow m^2 + 8m - 8 = 0 \Leftrightarrow m = -4 \pm 2\sqrt{6}$ (thỏa $m \neq 0$)

Câu II (2 điểm): 1/ $\cos x + \sin^2 x\cos x + \sin x + \cos^2 x\sin x = (\sin x + \cos x)^2$

$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x) + \sin x\cos x(\sin x + \cos x) = (\sin x + \cos x)^2$

$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)\,[(\sin x + \cos x) - \sin x\cos x - 1] = 0$

$\Leftrightarrow \sin x + \cos x = 0$ hay $(1 - \sin x)(1 - \cos x) = 0$

$\Leftrightarrow \text{tg}x = -1$ hay $\sin x = 1$ hay $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$ hay $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$ hay $x = k2\pi, k \in Z$

2/ $3\sqrt{x-1} + m\sqrt{x+1} = 2\sqrt[4]{(x-1)(x+1)}$, ĐK : $x \geq 1$

Cách 1: Khi x = 1 thì m = 0 Vậy khi m = 0 thì phương trình có nghiệm x = 1

Khi x > 1 , phương trình tương đương

$3 + m\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}} = 2\sqrt[4]{\dfrac{x+1}{x-1}}$. Đặt $t = \sqrt[4]{\dfrac{x+1}{x-1}}$ Ta có: với x > 1 thì t > 1

Khi đó phương trình thành $mt^2 + 3 = 2t$ $\Leftrightarrow m = \dfrac{2}{t} - \dfrac{3}{t^2}$

Ta có: $m' = \dfrac{-2t+6}{t^3}$, m' = 0 $\Leftrightarrow t = 3$. Khi $t \in (1\ ;\ 3]$ thì m tăng và nhận giá trị trên $(-1; \dfrac{1}{3}]$

Khi $t \in (3\ ;\ +\infty\,]$ thì m giảm và và nhận giá trị trên $(\dfrac{1}{3}; 0)$

Do đó: yêu cầu bài toán tương đương với $-1 < m \leq \dfrac{1}{3}$

Cách 2: Chia 2 vế cho $\sqrt{x+1}$ phương trình thành : $m = 2\sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x+1}} - 3\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$

Đặt $u = \sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x+1}}$ Ta có: với x > 1 thì 0 < u < 1

Phương trình thành $m = 2u - 3u^2$ đây là hàm bậc 2 có miền giá trị trên (0 ; 1) là $(-1; \dfrac{1}{3}]$

Do đó: yêu cầu bài toán tương đương với $-1 < m \leq \dfrac{1}{3}$

Câu III (2 điểm):

1/ d_1 qua A (0;1;–2) VTCP $\overrightarrow{a} = (2;-1;1)$; d_2 qua B (–1;1;3) VTCP $\overrightarrow{b} = (2;1;0)$

Ta có : $\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = (-1;,2;4)$; $\overrightarrow{AB} = (-1;0;5)$

Do $\left[\vec{a}, \vec{b}\right]\overrightarrow{AB} = 1 + 0 + 20 = 21 \neq 0$ nên d_1, d_2 chéo nhau.

2/ Gọi (α) là mặt phẳng chứa d_1 và $\perp$ (P), (α) có VTCP $\overrightarrow{a} = (2;-1;1)$ và $\overrightarrow{n_p} = (7;1;-4)$

$\Rightarrow$ PVT $\overrightarrow{m_\alpha} = (3;15;9) = 3(1;5;3)$.

Phương trình (α) : $1(x - 0) + 5(y - 1) + 3(z + 2) = 0$ $\Leftrightarrow$ $x + 5y + 3z + 1 = 0$

Cách 1 : Gọi $N = d_2 \cap \alpha$ Do $N \in d_2 \Rightarrow \exists t : N(-1 + 2t;\ 1 + t;\ 3)$

$N \in (\alpha) \Rightarrow (-1 + 2t) + 5(1 + t) + 9 + 1 = 0$

$\Rightarrow 7t + 14 = 0 \Rightarrow t = -2$ Vậy $N(-5;\ -1;\ 3)$

Phương trình (d) cần tìm : $\dfrac{x+5}{7} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-3}{-4}$

Cách 2 : Gọi (β) là mặt phẳng qua d_2 và $\perp$ (P);

(β) có VTCP $\overrightarrow{b} = (2;1;0)$ và $\overrightarrow{n_p} = (7;1;-4) \Rightarrow$ PVT $\overrightarrow{k_\beta} = (-4; 8; -5)$

Phương trình (β) : $-4(x + 1) + 8(y - 1) - 5(z - 3) = 0 \Leftrightarrow -4x + 8y - 5z + 3 = 0$

Phương trình (d) : $\begin{cases} x + 5y + 3z + 1 = 0 \\ -4x + 8y - 5z + 3 = 0 \end{cases}$

Câu IV : 1/ Phương trình hoành độ giao điểm hai đường:

$(e + 1)x = (1 + e^x)x \Leftrightarrow x(e^x - e) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hay $x = 1$

Nhận xét: Với $\forall x \in [0;1] \Rightarrow x(e^x - e) \leq 0$

$S = -\int_0^1 x(e^x - e)dx$ $u = x \Rightarrow du = dx$; $dv = (e^x - e)dx$ Chọn $v = e^x - ex$

$S = -\left[x(e^x - ex)\right]_0^1 + \int_0^1 (e^x - ex)dx = \left[e^x - e\dfrac{x^2}{2}\right]_0^1 = \dfrac{e}{2} - 1$ (đvdt)

2/ Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho 2 số dương và x.y.z = 1 ta có:

$$P \geq \frac{x^2\, 2\sqrt{yz}}{y\sqrt{y} + 2z\sqrt{z}} + \frac{y^2\, 2\sqrt{zx}}{z\sqrt{z} + 2x\sqrt{x}} + \frac{z^2\, 2\sqrt{xy}}{x\sqrt{x} + 2y\sqrt{y}}$$

$$= 2\left(\frac{x\sqrt{x}}{y\sqrt{y} + 2z\sqrt{z}} + \frac{y\sqrt{y}}{z\sqrt{z} + 2x\sqrt{x}} + \frac{z\sqrt{z}}{x\sqrt{x} + 2y\sqrt{y}}\right)$$

Đặt: $a = y\sqrt{y} + 2z\sqrt{z}$; $b = z\sqrt{z} + 2x\sqrt{x}$; $c = x\sqrt{x} + 2y\sqrt{y}$

$\Rightarrow x\sqrt{x} = \dfrac{c - 2a + 4b}{9}$; $y\sqrt{y} = \dfrac{a - 2b + 4c}{9}$; $z\sqrt{z} = \dfrac{b - 2c + 4a}{9}$

Từ đó: $P \geq 2\left[\dfrac{1}{9}\left(\dfrac{c}{a} + \dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{c}\right) + \dfrac{4}{9}\left(\dfrac{b}{a} + \dfrac{c}{b} + \dfrac{a}{c}\right) - \dfrac{6}{9}\right]$

Áp dụng bất đẳng thức Cô - si cho 3 số dương ta có :

$P \geq 2\left[\dfrac{1}{9}.3 + \dfrac{4}{9}.3 - \dfrac{6}{9}\right] = 2.$ Vậy min P = 2 $\Leftrightarrow$ x = y = z = 1

V.a . (Không phân ban) (2 đ)

1/ Gọi H(x; y). Ta có $\overrightarrow{BH} = (x + 2; y + 2)$, $\overrightarrow{AC} = (4; -4)$, $\overrightarrow{AH} = (x; y - 2)$.

H là chân đường cao kẻ từ B của tam giác ABC nên :

$$\begin{cases} \overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{AH} \text{ cùng phương } \overrightarrow{AC} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(x+2) - 4(y+2) = 0 \\ 4(y-2) + 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Vậy H(1; 1)

M và N lần lượt là trung điểm AB và BC nên M(–1, 0); N(1, –2)

Gọi I là tâm đường tròn cần tìm.

Ta có : $\begin{cases} IH^2 = IN^2 \\ IH^2 = IM^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 = (x-1)^2 + (y+2)^2 \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 = (x+1)^2 + y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

Vậy $I\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$. Bán kính $R = IM = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{5}{2}}$.

Vậy phương trình đường tròn cần tìm là : $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}$

2/ Ta có: $(1+x)^{2n} = C_{2n}^0 + xC_{2n}^1 + x^2C_{2n}^2 + x^3C_{2n}^3 + x^4C_{2n}^4 + ... + x^{2n-1}C_{2n}^{2n-1} + x^{2n}C_{2n}^{2n}$

$(1-x)^{2n} = C_{2n}^0 - xC_{2n}^1 + x^2C_{2n}^2 - x^3C_{2n}^3 + x^4C_{2n}^4 + ... - x^{2n-1}C_{2n}^{2n-1} + x^{2n}C_{2n}^{2n}$

$(1+x)^{2n} - (1-x)^{2n} = 2C_{2n}^1 + 2x^3C_{2n}^3 + ... + 2x^{2n-1}C_{2n}^{2n-1}$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\int_0^1 \left[(1+x)^{2n} - (1-x)^{2n}\right]dx = \left[\frac{1}{2}C_{2n}^1x^2 + \frac{1}{4}C_{2n}^3x^4 + ... + \frac{1}{2n}C_{2n}^{2n-1}x^{2n-1}\right]_0^1$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\left[\frac{(1+x)^{2n+1}}{2n+1} + \frac{(1-x)^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{2}C_{2n}^1 + \frac{1}{4}C_{2n}^3 + ... + \frac{1}{2n}C_{2n}^{2n-1}$

$\Rightarrow \frac{(2^n - 1)}{2n+1} = \frac{1}{2}C_{2n}^1 + \frac{1}{4}C_{2n}^3 + ... + \frac{1}{2n}C_{2n}^{2n-1}$

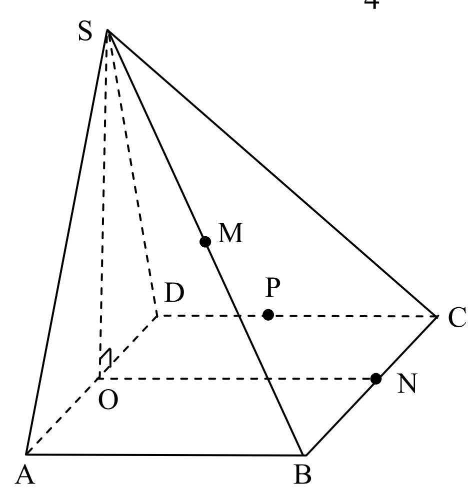
Câu V.b: 1/ Điều kiện $x > \frac{3}{4}$

Bpt $\Leftrightarrow \log_3(4x-3)^2 - \log_3(2x+3) \le 2 \quad \Leftrightarrow \log_3(4x-3)^2 \le \log_3 9(2x+3)$

$\Leftrightarrow (4x-3)^2 \le 9(2x+3) \Leftrightarrow 8x^2 - 21x - 9 \le 0 \quad \Leftrightarrow -\frac{3}{8} \le x \le 3$

So điều kiện $x > \frac{3}{4}$ được nghiệm bất phương trình là $\frac{3}{4} < x \le 3$

V. b: 2/



Gọi O là trung điểm của AD

Δ SAD đều $\Rightarrow SO \perp AD$

Mà Mp(SAD) $\perp$ Mp (ABCD) nên SO $\perp$ Mp (ABCD)

Chọn hệ trục tọa độ vuông góc Oxyz, sao cho: $A(\frac{a}{2};0;0)$; $D(-\frac{a}{2};0;0)$; N(0;a;0)

$\Rightarrow B(\frac{a}{2};a;0); C(-\frac{a}{2};a;0); S(0;0;\frac{a\sqrt{3}}{2}); M(\frac{a}{4};\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{4}); P(-\frac{a}{2};\frac{a}{2};0)$

a. $\overrightarrow{AM} = \left(-\frac{a}{4};\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)$; $\overrightarrow{BP} = \left(-a;-\frac{a}{2};0\right) \Rightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BP} = 0 \Rightarrow AM \perp BP$ (đpcm)

b. $\overrightarrow{CN} = (\frac{a}{2};0;0)$; $\overrightarrow{CP} = (0;-\frac{a}{2};0) \Rightarrow \left[\overrightarrow{CN},\overrightarrow{CP}\right] = (0;0;-\frac{a^2}{4})$; $\overrightarrow{CM} = (\frac{3a}{4};-\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{4})$

$\Rightarrow V_{CMNP} = \frac{1}{6}\left|[\overrightarrow{CN},\overrightarrow{CP}].\overrightarrow{CM}\right| = \frac{a^3\sqrt{3}}{96}$ (đvtt).

Cách khác: $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AS}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OS})$

$\overrightarrow{BP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}) = \frac{1}{2}(2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}) = \frac{1}{2}(2\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BA})$

$\Rightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BP} = \frac{1}{4}(-AB^2 + AD^2) = 0 \Rightarrow AM \perp BP$

$V_{CMNP} = \frac{1}{3}S_{CMP}.d(M,(ABCD)) = \frac{1}{3}\frac{a^2}{8}\frac{1}{2}SO = \frac{a^3\sqrt{3}}{96}$ (đvtt)

PHẠM HỒNG DANH – TRẦN VĂN TOÀN

(TRUNG TÂM BỒI DƯỠNG VĂN HÓA VÀ LUYỆN THI VĨNH VIỄN)